

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

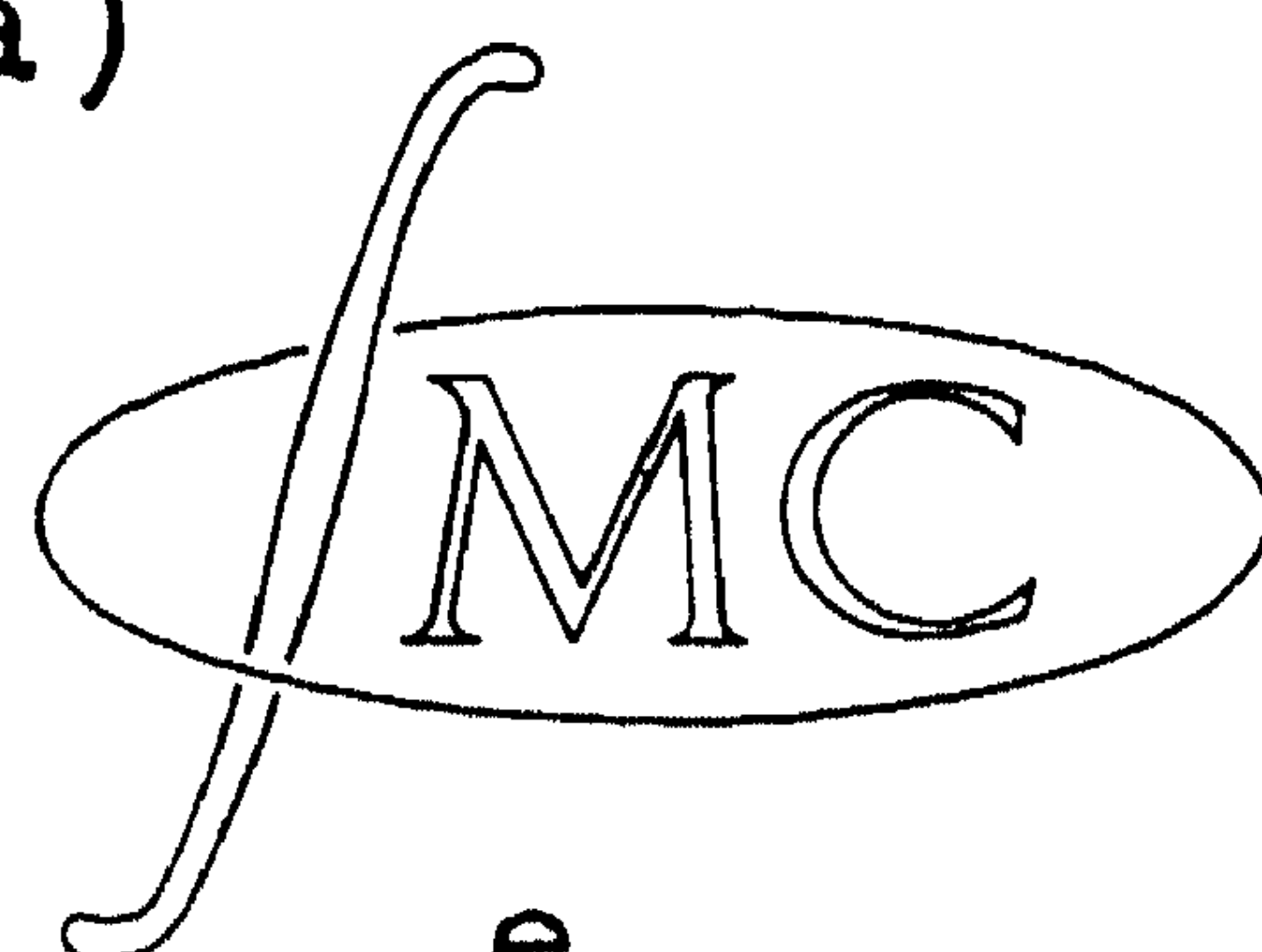
Hoofdstuk XV

Wachttijden

door

F. Göbel en W. Molenaar

(Dit hoofdstuk is ten dele gebaseerd op
rapport S 246 (C 11) deel I, door Ir.
A.R. Bloemena)



2^e druk

september 1964

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Inleiding

Iedereen kent de situatie waarin klanten aankomen bij een loket, waar zij door een bediende worden geholpen.

Minder bekend zijn de situaties in fabrieken, waar een aantal gelijksoortige machines in bedrijf zijn, die, indien zij door storing mochten uitvallen, worden hersteld door één van de aan het bedrijf verbonden reparateurs, zodra deze daarvoor beschikbaar komt.

De hierboven beschreven situaties zijn overeenkomstig in die zin, dat er in beide gewacht en bediend wordt. Het behoeft geen betoog dat wachten behalve vervelend ook kostbaar kan zijn.

De wachttijd voor een loket of de tijdsduur welke voorafgaat aan een reparatie hangt uiteraard sterk af van het aantal ingeschakelde bedienden.

Door het openstellen van een extra loket of door het toevoegen van een extra reparateur kan men de wachttijd vaak bekorten. Deze maatregelen brengen echter kosten met zich mee en de vraag is of deze offers opwegen tegen de vermindering van het aantal klanten dat ongeduldig wordt en de rij verlaat resp. tegen de eventuele toename van de produktie. Ook kan men overwegen of het niet voordelig is om kleine reparaties te laten voorgaan. Dergelijke typen van keuze-problemen kunnen met behulp van de theorie van de wachttijden wiskundig worden behandeld. Met opzet stellen wij vast dat dit kan geschieden met behulp van de theorie van de wachttijden omdat de theorie zelf zich niet bezighoudt met optimaliteitsproblemen.

De te behandelen problemen geven aanleiding tot het opstellen van een wiskundig model, waarin o.a. de volgende aspecten een rol spelen:

- a) Het aank

het aantal aankomsten in een tijdsinterval van gegeven lengte. Deze verdelingen kunnen nog van het tijdstip afhangen, men denke b.v. aan spitsuren.

- b) Het bedieningsmechanisme (het aantal loketten, de kansverdeling van de bedieningstijd e.d.).
- c) De rijdiscipline. Tenzij anders vermeld wordt nemen wij aan dat de klanten in volgorde van aankomst worden geholpen. Maar men kan ook bepaalde klanten voorrang geven, b.v. omdat zij tevoren een afspraak hebben gemaakt of omdat zij een kortere bedieningstijd hebben.

Aan de hand van bepaalde onderstellingen over deze factoren tracht men informatie in te winnen over bijv. de verdelingsfunctie van de rijlengte, de verdelingsfunctie van de wachttijd, de vrije tijd van de bediende, kortom: grootheden die een maat zijn voor de efficiency van het systeem.

In het hierna komende zullen wij spreken over loketten en klanten, over machines en reparateurs, maar men bedenke dat de resultaten ook geldig zijn in vele andere toepassingsgebieden. Zowel vliegvelden als telefoonlijnen kunnen dikwijls beschouwd worden als een loket waar de klant (vliegtuig of abonnee) op bediening wacht.

2. Het proces

Wanneer men als toeschouwer het komen en gaan van klanten bij een loket gadeslaat, dan ontdekt men dat

- a) niet van tevoren met zekerheid is vast te stellen op welke tijdstippen de rijlengte zich zal wijzigen;
- b) niet van tevoren met zekerheid is vast te stellen of op de in

te doen, als $n=1$ is één klant aanwezig die geholpen wordt, voor $n=k+1$ zijn er bovendien k klanten die wachten. De toestandsveranderingen van het systeem (aankomst en vertrek van klanten) voltrekken zich niet deterministisch; het systeem is onderworpen aan een stochastisch proces. Een speciaal soort stochastisch proces is in hoofdstuk IX behandeld, n.l. de enkelvoudige Markovketen. Het nu beschouwde proces van wachtende is alleen een keten indien wij het proces op discrete tijdstippen aanschouwen.

Beperken wij onze aandacht tot discrete, op gelijke afstanden gelegen (equidistante) tijdstippen, dan nog behoeft het proces geen enkelvoudige Markovketen te zijn. Immers bij een enkelvoudige Markovketen hangen de overgangskansen slechts af van de laatst-aangenomen toestand, en niet van de daaraan voorafgaande toestanden. Er is echter geen enkele garantie dat het hierboven beschouwde proces zich op deze wijze laat beschrijven. Als er b.v. in de beschouwde wachtsituatie spitsuren zijn, is er bij waarnemen om de vijf minuten aan het begin van het spitsuur een grote kans dat de rijlengte toeneemt. Aan het eind van het spitsuur zal de rijlengte meestal afnemen. De overgangswah vanuit een vaste toestand zijn hier dus niet constant in de tijd.

Indien het beschouwde proces geen enkelvoudige Markovketen is, en er ook niet toe herleid kan worden door het invoeren van meer complexe toestanden, dan kan het proces veelal gezien worden als een Markovproces waarover in Hoofdstuk IX, par. 11 gesproken werd. Men kan voor deze processen aantonen, dat onder bepaalde voorwaarden, waarop wij niet nader zullen ingaan, maar die voor wachttijdprocessen dikwijls zijn vervuld, ook invariante verdelingen bestaan. Deze kansverdelingen hebben betrekking op de toestand van het systeem op een "zeer ver" gelegen tijdstip. In hoofdstuk IX hebben wij deze kansverdelingen bepaald voor enkel-

voudige Markovketens met eindig veel toestanden. Op een overeenkomstige wijze kunnen deze kansverdelingen ook voor de overige processen worden bepaald.

In de wachttijdtheorie werkt men graag met de invariante verdeling, omdat deze niet afhangt van de begin-toestand. Men zegt dan dat het proces wordt beschouwd in de stationaire toestand.

Het is dikwijls ook zinvol om het proces niet te beschouwen op equidistante tijdstippen, maar juist op die tijdstippen waarop de toestand van het systeem zich wijzigt. Dit zijn dus de tijdstippen waarop een klant binnenkomt of weggaat, mits we de mogelijkheid uitsluiten dat er tegelijk een klant aankomt en een klant vertrekt. Het is bij deze afspraak onmogelijk geworden dat twee opeenvolgende toestanden van het systeem gelijk zijn.

Vaak onderscheidt men in de wachttijdtheorie machineproblemen, waarbij het aantal potentiële klanten begrensd is, en loketproblemen waarbij dit (in het model althans) niet het geval is. In een loketprobleem kan de toestandsvariabele n die op pag. 2 gedefinieerd is aftelbaar oneindig veel waarden aannemen ¹⁾. In paragraaf 5 wordt een loketprobleem voor één loket behandeld, terwijl in paragraaf 6 een machineprobleem voor meer "loketten" aan de orde is.

1) Men spreekt van aftelbaar veel toestanden als er een voorschrift ontworpen kan worden zodanig dat aan iedere toestand op een ondubbelzinnige wijze een nummer kan worden toegevoegd. In bovenstaande situatie is dit zeer eenvoudig: men nummert nl. de toestanden in overeenstemming met de lengte van de rij. Indien echter de toestand van het systeem gekenmerkt wordt door twee grootheden b.v. het aantal mannen en het

3. Het Poisson-proces

In deze paragraaf zullen wij allereerst aantonen dat onder betrekkelijk eenvoudige onderstellingen het aantal klanten dat in een tijdsinterval van een willekeurige maar vaste lengte aankomt, verdeeld is volgens een Poissonverdeling.

Laat $\underline{x}(t)$ het aantal klanten zijn dat in het interval $[0, t)$ aankomt, dan luiden de bovengenoemde onderstellingen:

- a) In ieder eindig tijdsinterval komt slechts een eindig aantal klanten aan.
- b) Op ieder tijdstip komt hoogstens één klant aan.
- c) Als $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, dan zijn de aantallen klanten die resp. in de perioden $t_1 \leq t < t_2, \dots, t_{n-1} \leq t < t_n$ aankomen en welke gegeven worden door $\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_n) - \underline{x}(t_{n-1})$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden.
- d) De verdelingsfunctie van het aantal klanten, dat in $[s, t)$ aankomt, $\underline{x}(t) - \underline{x}(s)$, hangt alleen af van $(t-s)$.

Indien in een practijksituatie aan deze vier onderstellingen is voldaan dan heeft, zoals wij nu zullen bewijzen, het aantal aankomsten in een gegeven periode een Poissonverdeling.

Eerst bewijzen wij de volgende hulpstellingen.

Hulpstelling 1

Als $Q(t)$

voor elke $t > 0$ en elk natuurlijk getal n is bovendien

$$Q(t) = \left\{ Q\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^n. \quad (3.4)$$

Bewijs:

$$Q(s+t) \stackrel{\text{def}}{=} P[\underline{x}(s+t)=0] = P[\underline{x}(s+t)-\underline{x}(t)=0 \wedge \underline{x}(t)=0].$$

Wegens onderstelling c) zijn de gebeurtenissen in het rechterlid stochastisch onafhankelijk, terwijl de kans op de eerste gebeurtenis $Q(s)$ is volgens d). Dus is

$$Q(s+t) = P[\underline{x}(s+t)-\underline{x}(t)=0] \cdot P[\underline{x}(t)=0] = Q(s) \cdot Q(t).$$

Wegens $0 \leq Q(s) \leq 1$ volgt (3.3) direct uit (3.2). Ook volgt (3.3) direct uit de definitie van $Q(t)$: als de periode langer wordt dan de kans op geen aankomst in die periode nooit toenemen.

Voor het bewijs van (3.4) kunnen we het interval $[0, t)$ als volgt in n deelintervallen verdelen:

$$\left[0, \frac{t}{n}\right); \left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right); \dots; \left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right). \quad (3.5)$$

De gebeurtenis "geen klant in $[$

minstens één klant aan. Met kans één arriveren dus minstens n klanten in het eindige tijdsinterval $[0, t)$. Omdat dit geldt voor willekeurig grote n , zou het aantal aankomsten in $[0, t)$ oneindig groot zijn, zodat een tegenspraak ontstaat met onderstelling a). De onderstelling $Q(t)=0$ kan dus voor geen enkele $t > 0$ juist zijn.

Tenslotte is, met $s=1$ en $t=0$ in (3.3), $Q(1) \leq Q(0)$, zodat met $Q(1)$ ook $Q(0)$ positief is.

De eisen, die aan $Q(t)$ blijken beide hulpstellingen moeten worden opgelegd, blijken deze functie volledig te bepalen:

Hulpstelling 3

De enige overal positieve monotoon niet-stijgende functie $Q(t)$ die voldoet aan $Q(s+t) = Q(s) Q(t)$ is $Q(t) = e^{-ct}$.

Bewijs:

Met $t=1$ volgt uit (3.4): $Q(1) = \left\{ Q\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^n$. Stel $Q(1) = \alpha$, dan is dus

$$Q\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log \alpha}. \quad (3.6)$$

Maar $t = \frac{n}{m}$ geeft in (3.4):

of

$$\alpha^{s_i} \leq Q(\omega) \leq \alpha^{r_i}. \quad (3.9)$$

Omdat α^x een continue functie is van x naderen zowel α^{s_i} als α^{r_i} tot α^ω als $i \rightarrow \infty$, zodat met $c = -\log \alpha$ geldt

$$Q(\omega) = \alpha^\omega = e^{\omega \log \alpha} = e^{-c\omega} \quad (3.10)$$

Zou de constante c negatief zijn dan was $Q(1) = e^{-c} > 1$, maar de kans $Q(1)$ is ≤ 1 . Verder houdt $c=0$ in dat $Q(t)=1$ is voor elke eindige waarde van t . Met andere woorden: de kans op een aankomst van een klant in ieder eindig tijdsinterval is nul. Het is redelijk om aan te nemen, dat in dergelijke situaties geen wachttijdtheorie wordt toegepast.

Wij hebben nu de volgende samenvattende stelling bewezen.

Stelling 1

Voor de kans $Q(t)$ op geen aankomst in $[0, t)$ geldt onder de onderstellingen a) t/m d): $Q(t) = e^{-ct}$, waarbij $c > 0$ mag worden verondersteld.

Wij verdelen het interval $[0, t)$ weer in n gelijke deelintervallen volgens (3.5). Verder definiëren wij:

M.a.w. de kans op de gebeurtenis A is kleiner dan de kans op B_n en/of C_n , d.w.z.

$$P[A] \leq P[B_n \vee C_n] \leq P[B_n] + P[C_n]. \quad (3.11)$$

Als de gebeurtenis B_n heeft plaatsgevonden dan is zeker ook minstens één van de gebeurtenissen A en C_n geschied. M.a.w. de kans op de gebeurtenis B_n is kleiner dan de kans op A en/of C_n d.w.z.

$$P[B_n] \leq P[A \vee C_n] \leq P[A] + P[C_n]. \quad (3.12)$$

Uit (3.11) en (3.12) volgt:

$$|P[A] - P[B_n]| \leq P[C_n]. \quad (3.13)$$

Volgens een stelling uit de maattheorie mogen P en lim verwisseld worden mits $\lim C_n$ bestaat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P[C_n] &= P[\lim_{n \rightarrow \infty} C_n] = \\ &= P[\text{minstens één tijdstip met twee aankomsten}] = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dus geldt

$$P[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n]. \quad (3.15)$$

Men kan nu gemakkelijk nagaan dat voor $P[B_n]$ geldt:

</

Voor het rechterlid van (3.15) vindt men dan:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n] &= \frac{1}{m!} e^{-ct} (ct)^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{ct}{2!n} + \dots \right]^m \frac{n!}{n^m (n-m)!} = \\ &= \frac{e^{-ct} (ct)^m}{m!} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wij hebben nu de volgende stelling bewezen:

Stelling 2

Wanneer voldaan is aan de onderstellingen a) t/m d) heeft het aantal aankomsten $\underline{x}(t)$ in ieder tijdsinterval van lengte t een Poisson-verdeling, waarvan de kansen gegeven worden door

$$P [\underline{x}(t) = m] = \frac{e^{-ct} (ct)^m}{m!} . \quad (3.18)$$

De positieve parameter c stelt hier het verwachte aantal aankomsten per tijdseenheid voor. Immers de Poisson-verdeling (3.18) heeft verwachting ct , zodat het verwachte aantal aankomsten in iedere tijdsduur t gelijk is aan ct .

Vervolgens zullen wij een stelling bewijzen welke betrekking heeft op de kansverdeling van de lengte van het tijdsinterval tussen twee aankomsten. Men kan nl. bewijzen dat, als het aantal aankomsten in een periode van gegeven lengte een Poisson-verdeling heeft, de lengten van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende aankomsten onafhankelijk exponentieel verdeeld zijn, d.w.z.: als $\underline{s}_1$ de leng

